Formules d'intégration de Mirzakhani

Intégration sur des espaces quotients

(T, μ), Γ groupe qui préserve μ.

→ Intégrer sur $\Gamma \backslash T$? On suppose que l'on a χ_Γ qui vérifie : $\forall x \in T$, $\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_\Gamma(\gamma \cdot x) = 1$

Déf : Soit F Γ-périodique. On pose

$$\int_{\Gamma \backslash T} F \, d\mu = \int_T F \chi_\Gamma \, d\mu.$$

Lemme : Soit $F : T \to \mathbb{C}$, on la périodise en posant $F_\Gamma(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma x)$. Alors

$$\int_{\Gamma \backslash T} F_\Gamma \, d\mu = \int_T F \, d\mu$$

Ex : $T = \mathbb{R}^2$, $\mu =$ Lebesgue, $\Gamma = \alpha \mathbb{Z} \oplus \beta \mathbb{Z}$ agissant par translation.

$$\forall F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \quad F_\Gamma(x, y) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} F(x + n\alpha, y + m\beta).$$

Cas où F est déjà invariante par un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$: on pose

$$F_{\Gamma'\backslash\Gamma}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma'\backslash\Gamma} F(\gamma . x) \text{ est bien } \Gamma\text{-périodique.}$$

un seul représentant par classe d'équivalence

<u>Lemme</u> : $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash T} F_{\Gamma'\backslash\Gamma}\, d\mu = \int_{\Gamma'\backslash T} F\, d\mu = \int_T F \chi_{\Gamma'}\, d\mu$

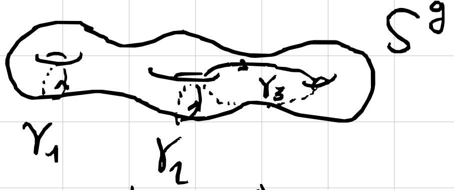
où $\chi_{\Gamma'}$ est n'importe quelle fonction vérifiant $\sum_{\gamma\in\Gamma'} \chi_{\Gamma'}(\gamma x) = 1$.

<u>Exemple</u> : $\alpha\mathbb{Z}\oplus\beta\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$, $F(x,y)$ rapidement décroissante en x et β périodique en y,

$$F_{\Gamma'\backslash\Gamma}(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+\alpha n, y) \text{ est } \Gamma\text{-périodique}$$

et $\displaystyle\int_{\Gamma\backslash\mathbb{R}^2} F_{\Gamma'\backslash\Gamma}\, dx dy = \int_{\mathbb{R}\times(\beta\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})} F(x,y)\, dx dy$

Exemple de calcul typique pour les surfaces aléatoires:



$\gamma = (\vec{\gamma_1}, \dots, \vec{\gamma_m})$ multicourbe = union disjointe de courbes simples numérotées et orientées

$X = [S^g, f] \in \mathcal{T}_g$ surface de Riemann marquée

on pose $\Phi : X \mapsto F(\ell_X(\vec{\gamma_1}), \dots \ell_X(\vec{\gamma_m}))$, où $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$

rapidement décroissante, est bien définie sur $\mathcal{T}_g$.

$\Gamma = MCG^+(S^g)$.

Ici, F est déjà invariante par Γ', où Γ' est le groupe engendré par :

- les twists de Dehn $T_1, \dots, T_m$ autour des γ_i
- $MCG^+(S_\gamma)$, où $S_\gamma = S^g \setminus \gamma$

(⚠ S_γ pas forcément connexe, ici on voit MCG^+ agissant sur chaque composante connexe en préservant les composantes de bord)

$$\Phi_{\Gamma'\backslash\Gamma}(X) = \sum_{\varphi \in \Gamma'\backslash\Gamma} F(\ell_{\varphi.X}(\vec{\gamma_1}), \dots, \ell_{\varphi.X}(\vec{\gamma_m}))$$

$$= \sum_{\varphi \in \Gamma'\backslash\Gamma} F(\ell_X(\varphi^{-1}\vec{\gamma_1}), \dots, \ell_X(\varphi^{-1}\vec{\gamma_m}))$$

$$= \sum_{(\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_m}) \in \mathrm{Orb}_{MCG^+}(\vec{\gamma_1}, \dots, \vec{\gamma_m})} F(\ell_X(\vec{\alpha_1}), \dots, \ell_X(\vec{\alpha_m}))$$

Finalement,

Fct indicatrice d'un domaine fonda. $\mathcal{D}_{\Gamma'}$

$$\int_{\mathcal{M}_g = \Gamma\backslash T_g} \Phi_{\Gamma'\backslash\Gamma}(X)\, d\mu_{WP}(X)$$

$$= \int_{T_g} F(\ell_X(\vec{\gamma_1}), \dots, \ell_X(\vec{\gamma_m}))\, \chi_{\Gamma'}(X)\, d\mu_{WP}(X)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coord. de} \\ \text{Fenchel-Nielsen}}}{=} \int_{T_g} F(\ell_1, \dots, \ell_m)\, \chi_{\Gamma'}(\ell_1, \dots, \ell_m, \dots, \ell_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3}) \prod_{i=1}^{3g-3} d\ell_i\, d\theta_i$$

$$x_\Gamma, (l_1, \dots, l_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3})$$

$$= \mathbb{1}_{\left\{ \substack{0 \leq \theta_i \leq l_i \\ \forall i \in [\![1,m]\!]} \right\}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{D}_{l_1, \dots l_m}}}_{} (l_i, \theta_i, i \geq m+1)$$

domaine fondamental pour l'action de $MCG^+(S_\gamma)$ sur $\mathcal{T}_{\vec{l}}(S_\gamma)$

(Note : à $l_1, \dots l_m$ donnés, S_γ a $2m$ composantes de bord de longueurs $\vec{l} = (l_1, l_1, l_2, l_2, \dots, l_m, l_m)$)

Ainsi,

$$\int_{\mathcal{M}_g = \Gamma \backslash \mathcal{T}_g} \Phi_{\Gamma \cap \Gamma}(X) \, d\mu_{WP}(X)$$

$$= \int F(l_1, \dots l_m) \prod_{i=1}^{m} dl_i \underbrace{\left(\int_{\substack{l_i, \theta_i \\ i \geq m+1}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\vec{l}}} (l_i, \theta_i) \prod_{i=m+1}^{3g-3} dl_i \, d\theta_i \right)}_{Vol_{WP}(MCG^+(S_\gamma) \backslash \mathcal{T}_{\vec{l}}(S_\gamma)) = Vol(\mathcal{M}_{\vec{l}}(S_\gamma))}$$

NB : $S_\gamma = \bigcup_{i=1}^{q} S_i$ où S_i a un genre g_i, et n_i composantes de bord.

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_\ell(S_\gamma)) = \prod \mathrm{Vol}\Big(\mathcal{M}_{\underbrace{\vec{\ell}|_{\partial S_i}}_{\text{restriction de } \vec{\ell} \text{ aux composantes de bord de } S^i}}(S^{g_i, n_i})\Big)$$

Volume fini pour $\mathcal{M}_g$

Thm (Bers) $\exists\, L_g > 0$ tq toute surface hyperbolique X compacte de genre g admet une décomposition en pantalons $(\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3})$ tq $\ell_X(\gamma_k) \leq L_g$ $\forall k$.

On a même $\ell_X(\gamma_k) \leq \underbrace{4k \log\left(\frac{8\pi(g-1)}{k}\right)}_{\overset{!!}{t_k}}$ $\forall k$.

On a aussi $L_g \leq C(g-1)$ $\rightarrow$ question ouverte : peut-on avoir $L_g \leq C g^\alpha$, $\alpha < 1$?

Corollaire :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_g) \leq C_g \left(\frac{L_g^2}{2}\right)^{3g-3}$$

C_g = nb de types topologiques pour des décompositions en pantalons
= nb de décompositions en pantalons modulo l'action de $MCG^+(S^g)$
= nb de graphes 3-réguliers à $2g-2$ sommets.
(cf le modèle de surface aléatoire obtenu par recollement aléatoire de pantalons)

Démo du corollaire : Sur $\mathcal{M}_g$, on a

$$1 \leq \sum_{P=(\gamma_1, \dots \gamma_{3g-3})} F(\ell_X(\gamma_1), \dots, \ell_X(\gamma_{3g-3}))$$

où $F = \left(\mathbb{1}_{[0, L_g[}\right)^{\otimes 3g-3}$

$$= \sum_{P=(\Gamma_1, \dots \Gamma_{3g-3})} \sum_{(\gamma_1, \dots \gamma_{3g-3}) \in \mathrm{Orb}_{MCG^+}(\Gamma_1, \dots \Gamma_{3g-3})} F(\ell_X(\gamma_1), \dots \ell_X(\gamma_{3g-3}))$$

types topologiques de décompositio

Donc $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_g) \leq C_g \int F(\ell_1, \dots, \ell_{3g-3}) \prod_{i=1}^{3g-3} \ell_i \, d\ell_1 \dots d\ell_{3g-3}$

<u>Démo du thm de Bers</u> (due à Buser)

$\gamma_1 =$ systole , $\ell(\gamma_1) \leq 2 \log(4g-2)$

On considère ensuite $S_1 = S \setminus \gamma_1$, qui a 2 comp. de bord de longueur totale $\ell_X(\partial S_1) \leq 4 \log(4g-2)$

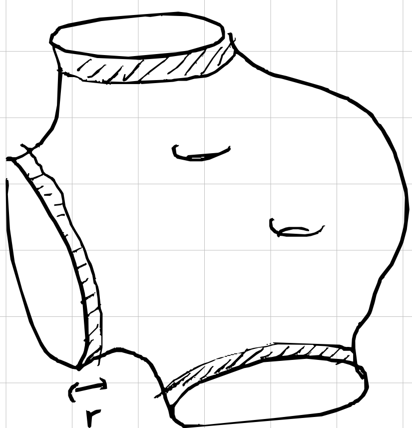
On applique récursivement le résultat suivant :

Si S est une surface hyperbolique à bords géodésiques telle que :

- aucune des comp. connexes n'est un pantalon
- $\mathrm{Aire}(S) \leq 4\pi(g-1)$
- $\ell(\partial S) \leq L$.

Alors on peut trouver γ à l'intérieur de S, où γ est soit une géod. simple, soit l'union de 2 géod. simples disjointes, tq :

- γ avec 2 ou 1 courbe de ∂S bordent un pantalon Y
- $\ell(\gamma) \le t_{k+1}$
- Si $S' = S \setminus Y$ alors $\ell(\partial S') \le t_{k+1}$



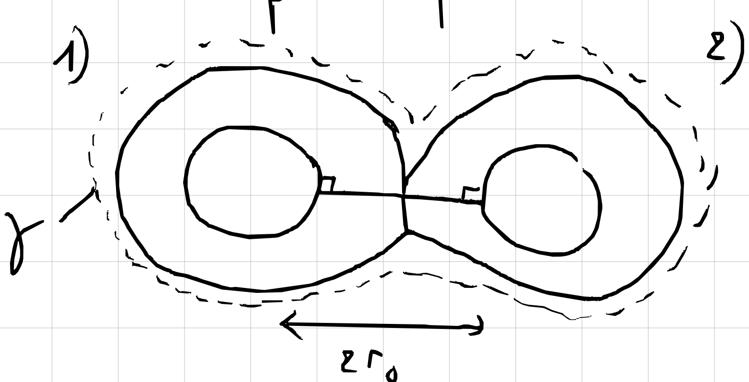
$B(\partial S, r)$ points à distance r du bord. pour $r < r_0$ c'est une union de cylindres.

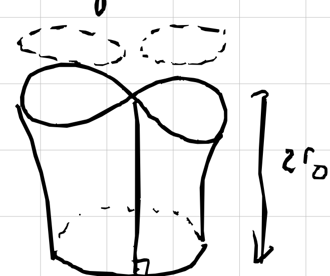
$$\text{Aire}\left(B(\partial S, r)\right) \sim \ell(\partial S)\frac{e^r}{2}$$

$$= \ell(\partial S)\sinh(r)$$

$$\text{Longueur}\left(\partial B(\partial S, r)\right) = \ell(\partial S)\cosh(r).$$

Pour $r = r_0$ il peut se passer 2 choses :





Dans le cas 1 : estimer $\ell(\gamma)$

→ Si $\ell(\partial S)\cosh(r_0) \leq t_k$ alors rien à faire et $\ell(\partial S') \leq t_k$

→ Sinon, $\ell(\partial S)\cosh(r_0) > t_k$ et il existe r' tq
$\ell(\partial S)\cosh(r') = t_k$.

On pose $d = r_0 - r'$. Par une estimée d'aire, d ne peut pas être trop grand.

$$\text{Aire}\left(B(\partial S, r_0) \setminus B(\partial S, r')\right) \leq 4\pi(g-1)$$

$$\Rightarrow \quad d \leq \log\left(1 + \frac{3(g-1)}{k}\right)$$

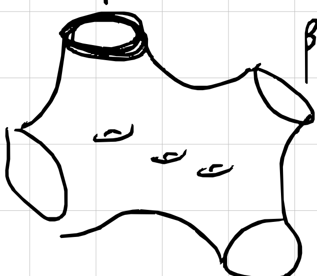
$$\ell(\gamma) \leq t_k + 4d \leq t_{k+1}.$$

→ en raffinant les arg., Buser trouve $L_g \leq 26(g-1)$.

Identité de McShane généralisée

1er pas vers la "récursion topologique"
= formules de récurrence sur les $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{\vec{\ell}}(S^{g,n}))$

X surface hyperbolique à n composantes de bord géodésiques ($n \geq 1$) et de genre g.



L_i = longueur de β_i

$$\mathcal{D}(x,y,z) = 2\log\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{y+z}{2}}}{e^{-x/2} + e^{\frac{y+z}{2}}}\right) \geq 0$$

symétrique en y et z.

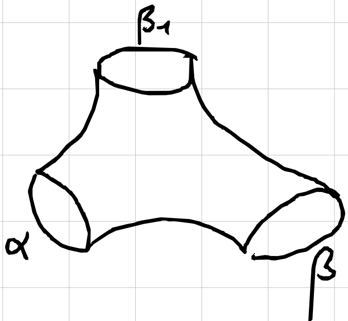
$$R(x,y,z) = x - \log\left(\frac{\cosh\left(\frac{y}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x+z}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{y}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x-z}{2}\right)}\right)$$

NB: $R(x,y,z) + R(x,z,y) = x + \mathcal{D}(x,y,z)$

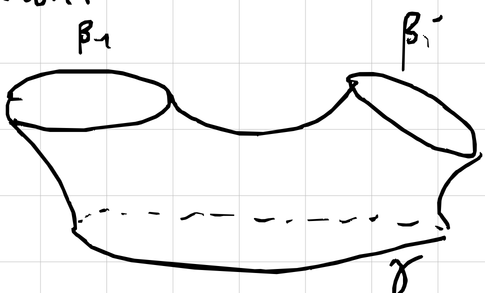
Thm (Mirzakhani)

$$\sum_{\{\alpha,\beta\}\in\mathcal{F}_1} \mathcal{D}(L_1, \ell_X(\alpha), \ell_X(\beta)) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{\gamma\in\mathcal{F}_{1,i}} R(L_1, L_i, \ell_X(\gamma)) = L_1$$

$\mathcal{F}_1$ = paires $\{\alpha, \beta\}$ de classes d'homotopie de courbes simples disjointes qui ne sont pas des courbes de bord, et tq α, β, β_1 bordent un pantalon.



$\mathcal{F}_{1,i}$ = classes d'homotopie γ de courbes simples qui ne sont pas des courbes de bord, et tq γ, β_1, β_i bordent un pantalon.



Si $(g,n) \neq (1,1)$, alors on a $\alpha \neq \beta$

Si $(g,n) = (1,1)$, alors on a $\alpha = \beta$.

McShane (1997) : cas des surfaces à cusps : $L_i \to 0$

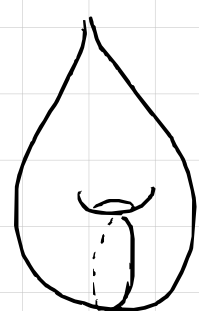
$$\frac{\mathcal{D}(x,y,z)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1+e^{\frac{y+z}{2}}}$$

$$\frac{\mathcal{R}(x,y,z)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1+e^{\frac{z+y}{2}}} + \frac{1}{1+e^{\frac{z-y}{2}}}$$

<u>Thm</u> (McShane pour des surfaces à cusps)

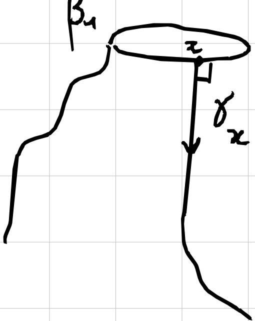
$$\sum_{\{\alpha,\beta\}} \frac{1}{1+e^{\frac{\ell_X(\alpha)+\ell_X(\beta)}{2}}} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{\gamma} \frac{1}{1+e^{\frac{\ell_X(\gamma)}{2}}} = \frac{1}{2}$$

Cas de $(g,n) = (1,1)$



$\alpha = \beta$

$$\underbrace{\sum_{\gamma \text{ courbe simple}} \frac{1}{1+e^{\ell_X(\alpha)}}}_{\text{dépend de la métrique}} = \frac{1}{2}.$$



γ_x géodésique orthogonale en x

$$E = \{ x \in \beta_1 ,\ \gamma_x \text{ est complète et simple} \}$$

Thm: E est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur β_1. (vient d'un thm de Birman-Series : sur une surface hyperbolique compacte, l'union des géod. simples est d'aire nulle).

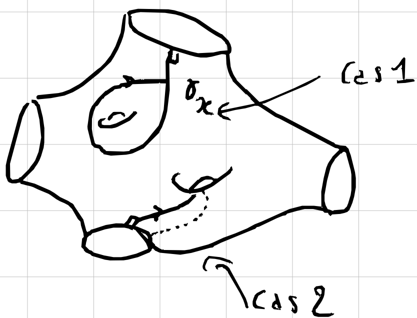
NB: Soit $\Omega(\gamma_x)$ l'ens. des pts d'accumulation de γ_x, pour $x \in E$. Alors $\Omega(\gamma_x)$ est :

- soit une géodésique périodique simple
- soit une lamination géodésique simple (minimale)

Si $x \in \beta_1 \setminus E$:

- Soit γ_x s'auto-intersecte
- Soit γ_x est simple mais pas complète (elle ressort par une composante de bord)

exemples:



On peut construire une application

$$\Phi : \beta_1 \setminus E \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pantalons de } S^{g,n} \text{ dont les composantes de} \\ \text{bord contiennent } \beta_1 \end{array} \right\}$$

Preuve de la formule:

$$L_1 = \mathrm{Leb}(\beta_1) = \mathrm{Leb}(\beta_1 \setminus E) \quad , \text{ or } \beta_1 \setminus E = \bigsqcup_P \Phi^{-1}(P)$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{F}} \mathrm{Leb}(\Phi^{-1}(P))$$

$$= \sum_{P \in \mathcal{F}_1} \mathrm{Leb}(\Phi^{-1}(P)) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{P \in \mathcal{F}_{1,i}} \mathrm{Leb}(\Phi^{-1}(P))$$

Où $\mathcal{F}_1 = \text{pantalons}(\beta_1, \alpha, \beta)$

$\mathcal{F}_{1,i} = \text{pantalons}(\beta_1, \beta_i, \gamma)$